Teoria do Risco
Aula 17

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

https://atuaria.github.io/portalhalley

11/2023

Modelos de risco Coletivo
O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $T \neq \emptyset$ um conjunto (tempo). A cada $t \in T$ associa-se uma variável aleatória X_t função de Ω .

- Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias **indexadas** por elementos t pertencentes a determinado intervalo (temporal ou espacial).

Processo estocástico

Seja γ um conjunto qualquer de indexação então um processo será definido por $\{X_t, t \in \gamma\}$. Assim dados $\gamma = \{L, D, Le, De\}$, $\{X_t, t \in \gamma\} = \{X_L, X_D, X_{Le}, X_{De}\}$.

N_t pode ser o número de atendimentos em um hospital no intervalo $[0, t]$ $(t \in [0,24])$, ou o número de acidentes no intervalo $[0, \mathrm{t}]$ $(t \in [0, km])$ ou N_t pode ser um modelo para o número de impactos de asteróides desde uma certa data de referência e etc...

Processo de Contagem

Um processo estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ pode ser entendido como um processo de contagem onde N_t representa o número de eventos que ocorreram num intervalo de tempo.

Esses eventos são descritos como pontos no eixo do tempo.

Processo de Contagem

Um processo estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ pode ser entendido como um processo de contagem se N_t representa o número de eventos que ocorreram num intervalo de tempo $(0, t]$ e se, para todo $t, s \geq 0$:

- $N_0 = 0$ (no instante inicial não há eventos)
- $N_t \in \mathbb{N}$
- $N_t \leq N_{t+s}$
- Para $s < t$, $N_t - N_s$ representa o número de eventos que ocorreram no intervalo de tempo $(s, t]$.

Processo de Contagem-axiomas

Condições que indicam que não haverá tendência a que os eventos se agrupem ...

1) Um processo de contagem tem incrementos independentes...

N_t (número de eventos ocorridos em t) é independente de $(N_{t+s} - N_t)$ (número de eventos ocorridos no intervalo $(t, t+s]$).

2) A probabilidade de que ocorra algum evento no intervalo $[0, \mathrm{t}]$ está entre 0 e 1 nunca assumindo esses valores pois implicaria em certeza...

$$\forall, t > 0, \qquad 0 < P(N_t > 0) < 1;$$

Processo de Contagem-axiomas

3) A probabilidade de que ocorra mais de um evento em um intervalo s, decresce em relação a probabilidade de ocorrer somente um evento nesse mesmo intervalo. Tal que:

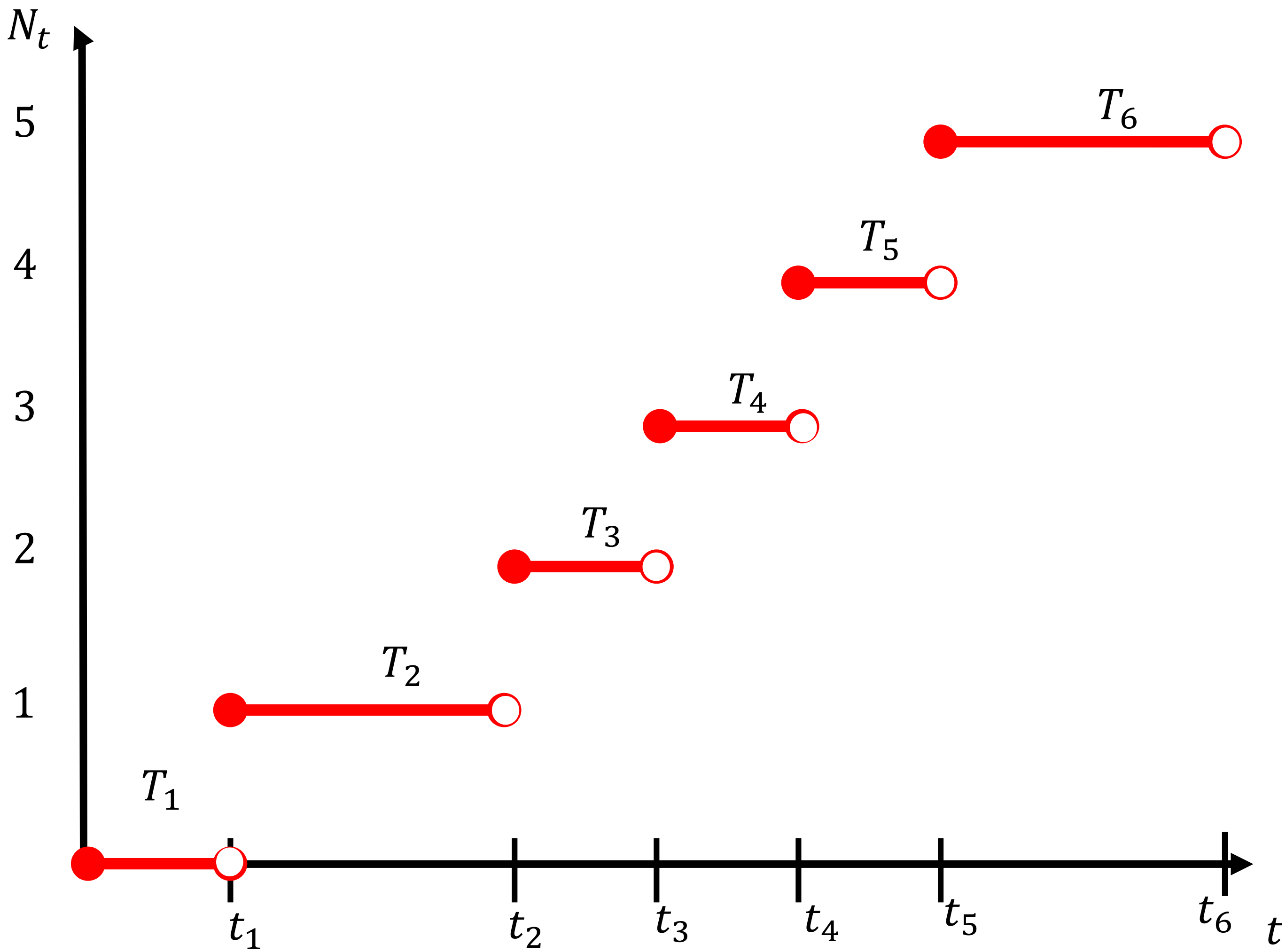
$$\forall, t > 0 \qquad \lim_{s\to 0} \frac{P(N_{t+s}-N_t > 1)}{P(N_{t+s}-N_t = 1)} = 0;$$

$P(N_{t+s} - N_t > 1)$ se torna desprezível em relação a $P(N_{t+s} - N_t = 1)$

4) $\{N_t, t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos não depender do intervalo observado, isto é, o número de eventos no intervalo $(t, t+s]$, tem a mesma distribuição que o número de eventos no intervalo $(0, t]$.

$N_{t_2+s} - N_{t_1+s}$ identicamente distribuída a $N_{t_2} - N_{t_1}$

Processo de Contagem



- Para todo $i \geq 1$, t_i é o instante da $i - ésima$ indenização (tempo global, desde a inicialização do sistema).
- $T_1 = t_1$, $T_2 = t_2 - t_1$, $T_n = t_n - t_{n-1}$ tempo entre as indenizações (saltos).
- Função média de um processo pontual $\Lambda(t) = E(N_t)$ (n° esperado de falhas até o instante t).

O processo de Poisson

- Em uma carteira de seguro de veículos ou residencial, a quantidade de sinistros que serão observados é um número aleatório.

- Diversas são as variáveis que podem impactar no número de ocorrências podendo dificultar a estimação exata desse valor.

- Uma alternativa largamente apresentada na literatura é a proposição de que o processo de Poisson pode modelar o processo de registro de sinistros.

O processo de Poisson

- O processo estocástico de Poisson é um processo de contagem de eventos aleatórios pontuais.

- Também conhecido como processo de “saltos”, é um processo onde o próximo evento não depende do histórico acumulado de eventos aleatórios e sim somente de sua última posição atingida.

  - Processo de Markov

O processo de Poisson Homogêneo

É dito que um processo de contagem $\{N_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo de intensidade λ, se as seguintes hipóteses estiverem satisfeitas:

a) $N_0 = 0$

b) O processo tem incrementos estacionários e independentes;

c) Se $\forall s \to 0^+, P\left(N_{t,t+s} = 1\right) = \lambda s + o(s)$ $\Rightarrow \lim_{s \to 0} \frac{o(s)}{s} = 0$

d) Se $\forall s \to 0^+, P\left(N_{t,t+s} > 1\right) = o(s)$ $\Rightarrow \lim_{s \to 0} \frac{o(s)}{s} = 0$

O processo de Poisson Homogêneo

A condição *c*) está relacionada a probabilidade de ocorrer um evento no intervalo, decrescer em relação a s a uma taxa constante λ.

$$P(N_{t,t+s} = 1) = \lambda s + o(s)$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{P(N_{t,t+s} = 1)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\lambda s}{s} + \lim_{s \to 0} \frac{o(s)}{s}$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{P(N_{t,t+s} = 1)}{s} = \lambda$$

O processo de Poisson Homogêneo

A condição d) estabelece que será nula a probabilidade de ocorrer mais de um evento em um intervalo de tempo s infinitesimal:

$$P\left(N_{t,t+s} > 1\right) = o(s)$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{P\left(N_{t,t+s} > 1\right)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{o(s)}{s} = 0$$

A medida que s se aproxima de 0, a probabilidade de ocorrer mais que um evento nesse intervalo decresce rapidamente tendendo a 0.

As condições c e d, nos dizem que em cada instante de tempo ocorre, no máximo uma ***indenização****.*

O processo de Poisson Homogêneo

Em consequência dessas hipóteses, $\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson com média λt, para todo $t > 0$

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$E(N_t) = \lambda t = var(N_t), \qquad M_{N_t}(r) = e^{\lambda t(e^r - 1)}$$

t pode ser entendido como o tamanho do intervalo de tempo sob análise.

O processo de Poisson H. (Demonstração)

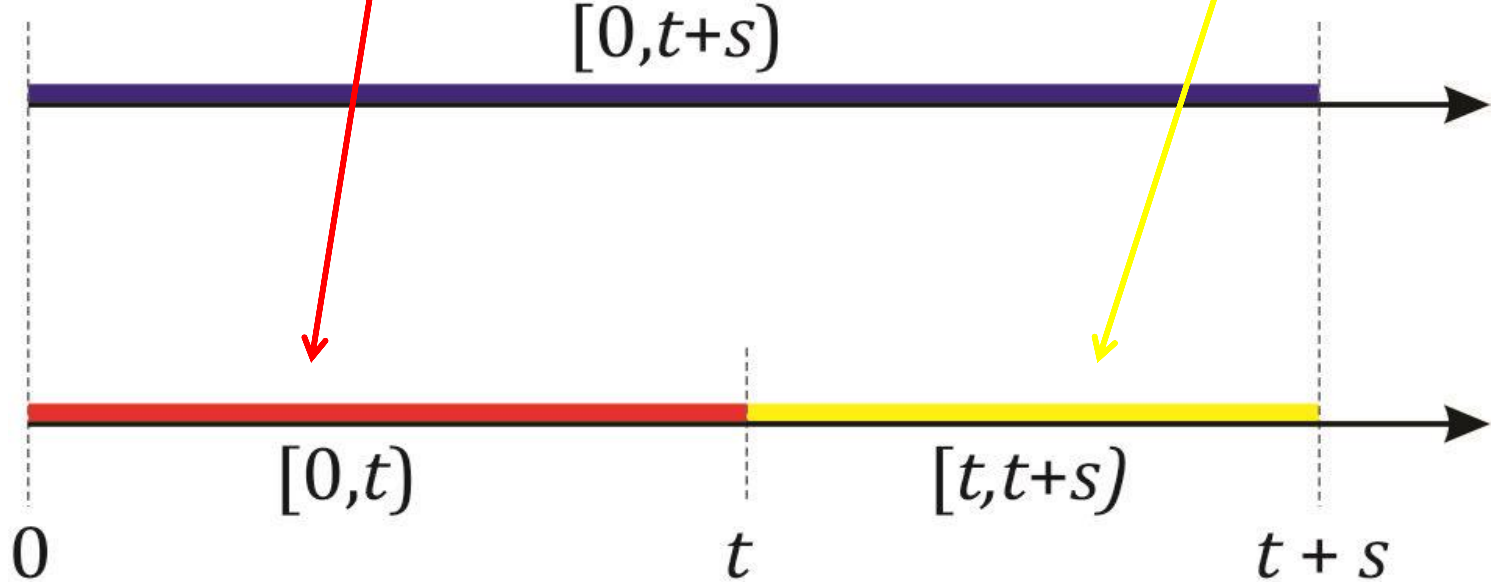
Por conveniência, seja t um valor no tempo após o tempo 0, então o intervalo $(0, t]$ tem amplitude t, e o intervalo $(t, t+s]$ tem amplitude s.

$$P(N_s = n) = P(\boldsymbol{n}\ ocorrências\ em\ um\ intervalo\ de\ tempo\ de\ tamanho\ \boldsymbol{s}).$$

Logo:

$$P(N_{t+s} = 0) = P(\mathbf{0}\ ocorrências\ no\ intervalo\ de\ tempo\ (0, t+s])$$

$P(N_{t+s} = 0)$
$=$ P(0 ocorrências no intervalo de tempo $(0, t]$ e 0 ocorrências no intervalo $(t, t+\boldsymbol{s}]$)



O processo de Poisson H. (Demonstração)

Considerando que o processo tem incrementos estacionários e independentes temos que:

$$P(N_{t+s} = 0) = P(N_t = 0)P(N_s = 0)$$

$$P(N_{t+s} = 0) = P(N_t = 0)\{1 - [P(N_s = 1) + P(N_s > 1)]\}$$

Adicionalmente ao se considerara as hipóteses $\mathbf{(c)}$ e $\mathbf{(d)}$, tem-se:

$$P(N_{t+s} = 0) = P(N_t = 0)\{1 - [\lambda s + o(s) + o(s)]\}$$

Logo:

$$P(N_{t+s} = 0) = P(N_t = 0) - \lambda s P(N_t = 0) - P(N_t = 0)[o(s) + o(s)]$$

$$P(N_{t+s} = 0\,) - P(N_t = 0) = -\lambda s P(N_t = 0) - P(N_t = 0)[o(s) + o(s)]$$

O processo de Poisson H. (Demonstração)

$$P(N_{t+s} = 0\ ) - P(N_t = 0) = -\lambda s P(N_t = 0) - P(N_t = 0)[o(s) + o(s)]$$

Ao se dividir por s, ambos os lados da equação, chegamos a:

$$\frac{P(N_{t+s} = 0\ ) - P(N_t = 0)}{s} = -\lambda P(N_t = 0) - P(N_t = 0)\frac{[o(s) + o(s)]}{s}$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{P(N_{t+s} = 0\ ) - P(N_t = 0)}{s} = = \lim_{s\to 0} -\lambda P(N_t = 0) - \lim_{s\to 0} P(N_t = 0)\frac{[o(s) + o(s)]}{s}$$

$$\boldsymbol{\frac{dP(N_t = 0)}{dt} = -\lambda P(N_t = 0)}$$

Trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$$

O processo de Poisson H. (Demonstração)

$$\frac{dP(N_t = 0)}{P(N_t = 0)} = -\lambda dt$$

$$\int \left(P(N_t = 0)\right)^{-1} dP(N_t = 0) = \int -\lambda dt$$

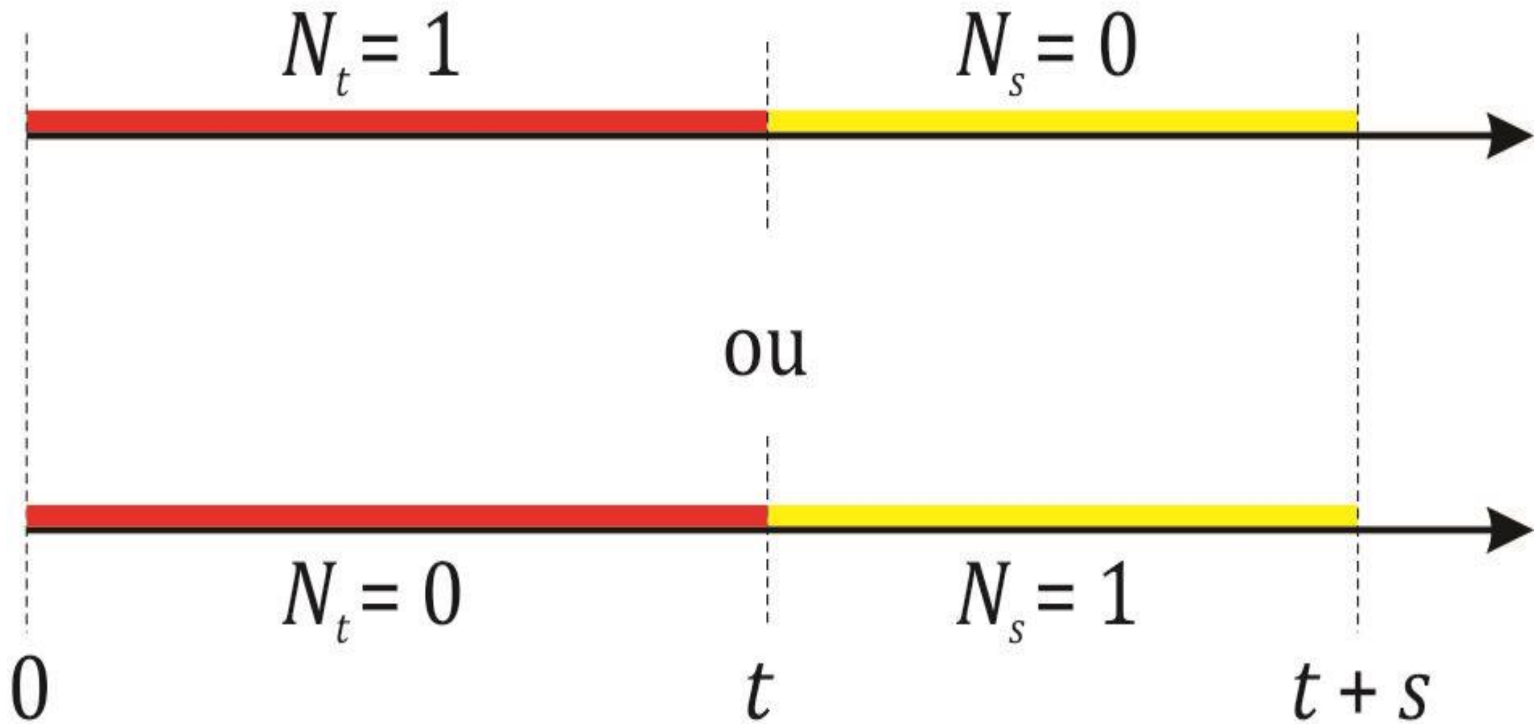
$$ln\, P(N_t = 0) = -\lambda t$$

Logo

$$\boldsymbol{P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}}$$

O processo de Poisson H. (Demonstração)

$$P(N_{t+s} = 1) = P(N_t = 1)P(N_s = 0) + P(N_t = 0)P(N_s = 1)$$



$$P(N_{t+s} = 1) = P(N_t = 1)[1 - P(N_s = 1) - P(N_s > 1)] + P(N_t = 0)P(N_s = 1)$$

O processo de Poisson H. (Demonstração)

$$P(N_{t+s} = 1) = P(N_t = 1)[1 - P(N_s = 1) - P(N_s > 1)] + P(N_t = 0)P(N_s = 1)$$

$$P(N_{t+s} = 1) = P(N_t = 1)[1 - \lambda s - o(s) - o(s)] + P(N_t = 0)[\lambda s + o(s)]$$

$$P(N_{t+s} = 1) = P(N_t = 1) - P(N_t = 1)\lambda s - P(N_t = 1)[o(s) + o(s)] + P(N_t = 0)\lambda s + P(N_t = 0)o(s)$$

$$P(N_{t+s} = 1) - P(N_t = 1) = -P(N_t = 1)\lambda s - P(N_t = 1)[o(s) + o(s)] + P(N_t = 0)\lambda s + P(N_t = 0)o(s)$$

Dividindo ambos os lados por s tem-se:

$$\frac{P(N_{t+s} = 1) - P(N_t = 1)}{s} = -P(N_t = 1)\lambda - \frac{P(N_t = 1)[o(s) + o(s)]}{s} + P(N_t = 0)\lambda + \frac{P(N_t = 0)o(s)}{s}$$

Fazendo $s \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{s\to 0}\frac{P(N_{t+s} = 1) - P(N_t = 1)}{s} = \lim_{s\to 0} -P(N_t = 1)\lambda - \lim_{s\to 0}\frac{P(N_t = 1)[o(s) + o(s)]}{s} + \lim_{s\to 0} P(N_t = 0)\lambda + \lim_{s\to 0}\frac{P(N_t = 0)o(s)}{s}$$

O processo de Poisson H. (Demonstração)

$$\frac{dP(N_t = 1)}{dt} = -P(N_t = 1)\lambda + P(N_t = 0)\lambda$$

Como $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$, temos a seguinte equação diferencial linear, de 1° ordem com coeficientes constantes:

$$\frac{dP(N_t = 1)}{dt} = -P(N_t = 1)\lambda + \lambda e^{-\lambda t}$$

$$\frac{dP(N_t = 1)}{dt} + P(N_t = 1)\lambda = \lambda e^{-\lambda t}$$

Fator de integração $e^{\lambda t}$

$$e^{\lambda t}\frac{dP(N_t = 1)}{dt} + e^{\lambda t}P(N_t = 1)\lambda = e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}$$

$$\frac{d\left[P(N_t = 1)e^{\lambda t}\right]}{dt} = e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}$$

O processo de Poisson H. (Demonstração)

$$\frac{d\left[P(N_t = 1)e^{\lambda t}\right]}{dt} = e^{\lambda t}\lambda e^{-\lambda t}$$

$$\int d\left[P(N_t = 1)e^{\lambda t}\right] = \int \lambda dt$$

$$P(N_t = 1)e^{\lambda t} = \lambda t$$

$$P(N_t = 1) = \lambda t\, e^{-\lambda t}$$

O processo de Poisson H. (Demonstração)

$$\frac{dP(N_t = 0)}{dt} = -P(N_t = 0)\lambda \quad \color{red}{\rightarrow} \quad P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}$$

$$\frac{dP(N_t = 1)}{dt} = -P(N_t = 1)\lambda + P(N_t = 0)\lambda \quad \color{red}{\rightarrow} \quad P(N_t = 1) = \frac{(\lambda t)^1 e^{-\lambda t}}{1!}$$

De forma similar para se encontrar n ocorrências no intervalo de tempo t basta resolver a equação diferencial:

$$\frac{dP(N_t = n)}{dt} = -P(N_t = n)\lambda + P(N_t = n - 1)\lambda \quad \color{red}{\rightarrow} \quad P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

O processo de Poisson Homogêneo

Em consequência dessas hipóteses, $\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson Homogêneo com média λt, para todo $t > 0$

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

Como a função intensidade é constante $\lambda(t) = \lambda$, o processo de Poisson Homogêneo não pode ser usado para modelar sistemas em deterioração ou melhoria.

EXEMPLO 1 :Suponha que a média do número de chamadas telefônicas que uma central telefônica recebe é de 30 chamadas por hora.

a) Qual a probabilidade que não tenha nenhuma chamada em um período de 3 minutos?

b) Qual a probabilidade que ocorra mais que 5 chamadas em um intervalo de 5 minutos?

$$\lambda = \frac{30}{60} = 0{,}5/\ m$$

a)

$$P(N_3 = 0) = \frac{e^{-0{,}5\times 3}(0{,}5 \times 3)^0}{0!} = 0{,}223$$

b)

$$P(N_5 > 5) = 1 - \sum_{n=0}^{5} \frac{e^{-0{,}5\times 5}(0{,}5 \times 5)^n}{n!} = 0{,}42$$

$$P(N_5 > 5) = 1 - [P(N_5 = 0) + P(N_5 = 1) + P(N_5 = 2) \ldots + P(N_5 = 5)]$$

O processo de Poisson Homogêneo

Quando o λ por unidade de tempo é alta e/ou o intervalo de tempo é suficientemente longo...

$$\lambda t \to \infty : P(N_t \leq n) = \Phi\left(\frac{n - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}}\right)$$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo.** Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES,M.D.;COSTA,L.H.;FERREIRA,L.;MARQUES,R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos.** Curitiba: CRV 2020.